7/5/2015

$<\,,\,>: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ $\quad <(z_1,\dots,z_n),(w_1,\dots,w_n)> = \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i$ (δεν είναι διγραμμική και συμμετρική)

$\|(z_1,\dots,z_n)\| = \sqrt{<(z_1,\dots,z_n),(z_1,\dots,z_n)>} = \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{z}_i$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Εστω $(V, <\,>)$ μιγαδικός ερμιτιανός χώρος. Τότε

(i) $<0_V, w> = <w, 0_V> = 0_{\mathbb{C}}$

(ii) $<v, w+z> = <v,w> + <v,z>$

(iii) $<v, \lambda w> = \bar{\lambda}<v,w>$

Απόδειξη (i) $<0_V, w> = <0_{\mathbb{C}} 0_V, w> = 0_{\mathbb{C}} <0_V, w> = 0_{\mathbb{C}}$ μιγαδικός αριθμός

$<w, 0_V> = \overline{<0_V, w>} = \bar{0}_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}}$

(ii) $<v, w+z> = \overline{(<w+z, v>)} = \overline{(<w,v> + <z,v>)} = \overline{<w,v>} + \overline{<z,v>} =$

$= <v,w> + <v,z>$.

(iii) $<v, \lambda w> = \overline{(<\lambda w, v>)} = \overline{(\lambda <w,v>)} = \bar{\lambda}\,\overline{<w,v>} = \bar{\lambda}<v,w>$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Εστω $(V, <\,>)$ μιγαδικός ερμιτιανός χώρος

(i) Αν $v,w \in V$, τότε v,w λέγονται κάθετα ή ορθογώνια αν $<v,w> = 0_{\mathbb{C}}$

(ii) Μια βάση $e = (e_1,\dots,e_n)$ του V λέγεται ορθοκανονική αν $<e_i,e_j> = \begin{cases} 1_{\mathbb{C}} & \text{αν } i=j \\ 0_{\mathbb{C}} & \text{αν } i \neq j \end{cases}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στο $\mathbb{C}^n$ με το κανονικό μιγαδικό ερμιτιανό γινόμενο $<\,,\,>$ η βάση $e_1 = (1,0,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$ είναι ορθοκανονική.

Το ίδιο ισχύει και για την βάση $g_1 = (1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2})$ $g_2 = (i/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ του $\mathbb{C}^2$

$\begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ (άρα g_1, g_2 γρ. ανεξ.)

$<g_1, g_2> = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(-i)}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$, $\|g_1\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

ΠΡΟΤΑΣΗ
Εστω $(V, <\ >)$ μιγαδικός ερμιτιανός χώρος. Ο Αλγόριθμος 126 (Gram-Schmidt) κατασκευάζει, ξεκινώντας από βάση $g_1, g_2, \dots, g_n$ του V ορθοκανονική βάση $e_1, e_2, \dots, e_n$ του V.

ΧΩΡΟΙ ΕΣ. ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ (ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ)	ΜΙΓ. ΕΡΜ. ΧΩΡΟΙ
• ορθοκανονικές βάσεις (Gram-Schmidt)	Ορθ. βάσεις (Gram-Schmidt)
• μέτρο, γωνία	μόνο μέτρο
• ισομετρίες	ισομετρίες
• ορθογώνιους πραγμ. πίνακες	μοναδιαίοι πίνακες
• συμμετρικά πραγ. πίνακες	πίνακες M με $M = (\bar{M})^t$ (ερμιτιανοί)

ΟΡΙΣΜΟΣ.
Εστω $(V, <\ >)$, $(W, <\ >)$ δύο μιγαδικοί ερμιτιανοί χώροι. Μια $\mathbb{C}$-γρ. απεικόνιση $T: V \to W$ λέγεται ισομετρία αν η T είναι 1-1, επί και $<T(v), T(w)>' = <v, w>$ για κάθε $v, w \in V$

ΟΡΙΣΜΟΣ
Ορίζουμε στο $\mathbb{C}^{n\times 1}$ το κανονικό μιγαδικό ερμιτιανό γινόμενο
$<\ ,\ >: \mathbb{C}^{n\times 1} \times \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{C}$
$< \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} > = z_1\bar{w}_1 + \dots + z_n\bar{w}_n$. Ομοίως ορίζουμε στο $\mathbb{C}^{1\times n}$ το κανονικό μιγαδικό ερμιτιανό γινόμενο
$<\ ,\ >: \mathbb{C}^{1\times n} \times \mathbb{C}^{1\times n} \to \mathbb{C}$
$<[z_1, \dots, z_n], [w_1, \dots, w_n]> = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + \dots + z_n\bar{w}_n$

ΠΡΟΤΑΣΗ
Εστω $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ πίνακας. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
(i) Οι στήλες του P είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n\times 1}$ ως προς το σύνηθες (ή κανονικό) μιγ. ερμ. γιν.
(ii) Οι γραμμές του P είναι ορθ. βάση του $\mathbb{C}^{1\times n}$ ως προς το σύνηθες ή κανονικό μιγ. ερμ. γιν.
(iii) Ο P αντιστρέφεται και $P^{-1} = (\bar{P})^t$

Παρατήρηση: Εύκολα βλέπουμε $(\bar{P})^t = (P^t)^-$

Παρατήρηση: Αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $A = (a_{ij})$ τότε $\bar{A}$ συμβολίζει τον πίνακα $(\overline{a_{ij}})$ π.χ $\left(\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}\right)^- = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$

Στο $\mathbb{C}^{n\times 1}$ $<z,w> = Tr(\bar{w}^t z)$ $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$

$P: \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{C}^{n\times 1}$ $<Pz, Pw> = Tr\left[(\overline{Pw})^t (Pz)\right] = Tr\left((\bar{P}\bar{w})^t Pz\right) =$
$= Tr(\bar{w}^t (\bar{P}^t P) z)$. Έχουμε $<Pz, Pw> = <z,w>$ $\forall z,w$
$\iff \bar{P}^t P = I_n$

ΟΡΙΣΜΟΣ
Έστω $M \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Ο M λέγεται μοναδιαίος αν αντιστρέφεται και $M^{-1} = (\bar{M})^t$ (ισοδύναμα οι στήλες του M ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n\times 1}$ με το κανονικό μιγαδικό ερμιτιανό γινόμενο)
(ισοδύναμα οι γραμμές του M ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{1\times n}$ με το κανονικό μιγαδικό ερμ. γιν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Έστω $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος. Αν δούμε τον P σαν στοιχείο του $\mathbb{C}^{n\times n}$ ο P είναι μοναδιαίος. Αντίστροφα, αν $P \in \mathbb{R}^{n\times m}$ και αν τον δούμε σαν στοιχείο του $\mathbb{C}^{n\times n}$ είναι μοναδιαίος, έπεται ότι P ορθογώνιος.
Με άλλα λόγια, θεωρώντας $\mathbb{R}^{n\times n} \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$:

$\{\text{Μοναδιαίοι Πίνακες}\} \cap \mathbb{R}^{n\times n} = \{\text{ορθογώνιοι πίνακες}\}$

Επίσης, αν $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ έχουμε A μοναδιαίος και $A \in \mathbb{C}^{n\times n} \setminus \mathbb{R}^{n\times n}$

$<\begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}> = i\bar{i} + 0\bar{0} = 1$

Επίσης $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ είναι μοναδιαίος.

ΠΡΟΤΑΣΗ
Έστω $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ μοναδιαίος. Τότε (i) κάθε ιδιοτιμή του M στο $\mathbb{C}$ έχει μέτρο 1
(ii) Αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμές του M με $\lambda_1 \neq \lambda_2$ και $X \in V_M(\lambda_1)$, $Y \in V_M(\lambda_2)$

τότε τα X, Y ορθογώνια ως προς το κανονικό ερμητιανό γινόμενο στο $\mathbb{C}^{n\times 1}$

(iii) Ο M είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{C}$. Μάλιστα υπάρχει μοναδιαίος Q με $Q^{-1}MQ$ διαγώνιο.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ο M λέγεται ερμιτιανός αν $(\bar{M})^t = M$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

$\{$Ερμιτιανοί πίνακες$\} \cap \mathbb{R}^{n\times n} = \{$πραγμ. συμ. πίνακες$\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ερμιτιανός. Τότε

(i) κάθε ιδιοτιμή του M είναι πραγματική

(ii) Αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμές του M με $\lambda_1 \neq \lambda_2$ και $X \in V_M(\lambda_1)$, $Y \in V_M(\lambda_2)$ τότε X, Y ορθογώνιοι ως προς το κανονικό μιγαδικό ερμιτιανό γινόμενο του $\mathbb{C}^{n\times 1}$.

(iii) Ο M είναι διαγωνίσιμος στο $\mathbb{C}$. Ακόμα ισχυρότερα υπάρχει μοναδιαίος $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ώστε $Q^{-1}MQ$ διαγώνιος

ΤΕΛΟΣ ΥΛΗΣ

Αρχή επανάληψης.